Quadratische Gleichungen mit Parameter II
Übung

1. Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

   a) $x^2 - a = 0$

   b) $x^2 = 4bx$

   c) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + c = 0$

   d) $2x^2 + 4x + d + 1 = 0$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen in Abhängigkeit vom reellen Parameter.

   a) $kx^2 + 2kx + k = 0;\ k \neq 0$

   b) $x^2 - k^2 = 0$

   c) $x^2 - 3kx + 2k^2 = 0$

   d) $x^2 + 2x + k = 0$

   e) $\frac{1}{2}kx^2 + 2x + 4 = 0$ mit $k \neq 0$

   f) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}ax - x + a = 0$

Quadratische Gleichungen mit Parameter II
Lösung

1.

a) $x^2 = a$

1. Fall: $a < 0$ keine Lösung
2. Fall: $a = 0$ eine Lösung
3. Fall: $a > 0$ zwei verschiedene Lösungen

Diese Aufgabe kann auch mit Hilfe der Diskriminante gelöst werden, was allerdings etwas aufwändiger wäre.

b) $x(x - 4b) = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4b$.

1. Fall: $b = 0$ eine doppelte Lösung
2. Fall: $b \neq 0$ zwei verschiedene Lösungen

Die Möglichkeit „Keine Lösung“ besteht hier nicht. Auch in dieser Aufgabe führt die Rechnung mit der Diskriminante umständlicher zum selben Ergebnis.

c) $D = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot c = 4 - 2c$

1. Fall: $c < 2$ zwei Lösungen
2. Fall: $c = 2$ eine Lösung
3. Fall: $c > 2$ keine Lösung

d) $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (d + 1) = 8 - 8d$

1. Fall: $d < 1$ zwei verschiedene Lösungen
2. Fall: $d = 1$ eine Lösung
3. Fall: $d > 1$ keine Lösung

2.

a) Teilen der Gleichung durch $k \neq 0$ führt zu $x^2 + 2x + 1 = 0$ bzw. $(x + 1)^2 = 0$.
Die Gleichung besitzt damit unabhängig von k die Lösungsmenge $L = \{-1\}$.

b) $x_{1/2} = \pm k$

1. Fall: $k = 0$ eine Lösung $L = \{0\}$
2. Fall: $k \neq 0$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{-k; k\}$

Es gibt hier immer mindestens eine Lösung.

c) $x_{1/2} = \frac{3k \pm \sqrt{(-3k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2k^2}}{2} = \frac{3k \pm k}{2}$

1. Fall $k = 0$ eine Lösung $L = \{0\}$
2. Fall $k \neq 0$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{k;\ 2k\}$

d) $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4k}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$

1. Fall: $k < 1$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{-1 \pm \sqrt{1-k}\}$
2. Fall: $k = 1$ eine Lösung $L = \{-1\}$
3. Fall: $k > 1$ keine Lösung $L = \emptyset$

e) $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8k}}{2 \cdot \frac{1}{2}k} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-2k}}{k}$

1. Fall: $k < 0{,}5$ zwei verschiedene Lösungen $L = \left\{\frac{-2 \pm 2\sqrt{1-2k}}{k}\right\}$
2. Fall: $k = 0{,}5$ eine Lösung $L = \left\{\frac{-2}{k}\right\}$
3. Fall: $k > 0{,}5$ keine Lösung $L = \emptyset$

f) $x^2 - (a+3)x + 3a = 0$

$x_{\frac{1}{2}} = \frac{(a+3) \pm \sqrt{\left(-(a+3)\right)^2 - 12a}}{2}$

$= \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2+6a+9-12a}}{2}$

$= \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2-6a+9}}{2}$

$= \frac{a+3 \pm \sqrt{(a-3)^2}}{2}$

$= \frac{a+3 \pm (a-3)}{2}$

$x_1 = \frac{a+3-(a-3)}{2} = 3$

$x_1 = \frac{a+3+(a-3)}{2} = a$

1. Fall: $a = 3$ eine Lösung $L = \{3\}$
2. Fall: $a \neq 3$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{3; a\}$